Klausur Allgemeine Volkswirtschaftslehre, Prüfer Prof. Dr. Arnold, September 1997

1. Aufgabe

Gegeben sei eine Ökonomie mit einem Gut *(Y)* und einem Produktionsfaktor, Arbeit *(A)*.
Die Produktionsmöglichkeiten werden durch die Funktion

$$Y = G(A) \ , \ G' > 0$$

beschrieben. Die Nutzenfunktionen der Konsumenten lauten

$$U_i = U^i\,(y_i, F_i) \ , \ \partial U^i / \partial y_i > 0 \ , \ \partial U^i / \partial F_i > 0 \ , \qquad i = 1, \dots, n$$

Weiterhin gilt:

$$Z_i = h_i + F_i \ , \qquad i = 1, \dots, n$$
$$A = \sum\nolimits_{i=1}^{n} h_i$$

Dabei bezeichnen

y_i die vom Konsumenten *i* verbrauchte Menge des Gutes,

F_i die Freizeit des Konsumenten *i* ,

h_i seine Arbeitszeit,

Z_i seine insgesamt verfügbare Zeit.

a) Leiten Sie für die beschriebene Ökonomie die notwendigen Bedingungen für ein Pareto-Optimum ab.

b) Erläutern Sie, inwiefern eine Pareto-Verbesserung möglich ist, wenn gilt:

$$\frac{\partial U^i / \partial F_i}{\partial U^i / \partial y_i} < \frac{dG}{dA} \qquad \text{für alle } i \ .$$

c) Prüfen Sie, ob in einer konkurrenzmäßig organisierten Wirtschaft ein Pareto-Optimum realisierbar ist, wenn alternativ

- der Güterverbrauch besteuert wird,
- der Arbeitseinsatz in der Produktion subventioniert wird.

Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

Musterlösung

a)

Wir maximieren die Lagrange-Funktion

$$L = U^j\left(y_j, F_j\right) + \sum_{i \neq j} \lambda_i \left[U^i\left(y_i, F_i\right) - \overline{U_i}\right] + \theta\left[G(A) - Y\right] + \mu_y\left(Y - \sum_i y_i\right)$$
$$+ \mu_a\left(\sum_i h_i - A\right) + \sum_i \mu_{zi}\left(Z_i - h_i - F_i\right)$$

[5 Punkte]

bezüglich $y_j, F_j, y_i, F_i\ (i \neq j), h_i, Y$ und A. Die notwendigen Bedingungen erster Ordnung für eine inneres Maximum sind

(1) $$\frac{\partial L}{\partial y_j} = \frac{\partial U^j}{\partial y_j} - \mu_y = 0$$

(2) $$\frac{\partial L}{\partial F_j} = \frac{\partial U^j}{\partial F_j} - \mu_{zj} = 0$$

(3) $$\frac{\partial L}{\partial h_i} = \mu_a - \mu_{zi} = 0 \quad \text{für alle } i$$

(4) $$\frac{\partial L}{\partial y_i} = \lambda_i \frac{\partial U^i}{\partial y_i} - \mu_y = 0 \quad \text{für alle } i \neq j$$

(5) $$\frac{\partial L}{\partial F_i} = \lambda_i \frac{\partial U^i}{\partial F_i} - \mu_{zi} = 0 \quad \text{für alle } i \neq j$$

(6) $$\frac{\partial L}{\partial Y} = \mu_Y - \theta = 0$$

(7) $$\frac{\partial L}{\partial Y} = \theta G' - \mu_a = 0$$

[2 Punkte]

Aus (1) - (5) folgt

$$-\left.\frac{dF_i}{dy_i}\right|_{U^i} = \frac{\partial U^i / \partial y_i}{\partial U^i / \partial F_i} = \frac{\mu_y}{\mu_a} = \frac{\partial U^j / \partial y_j}{\partial U^j / \partial F_j} = -\left.\frac{dF_j}{dy_j}\right|_{U^j}$$

[2 Punkte]

In Worten: Im Pareto-Optimum müssen die Grenzraten der Substitution zwischen Freizeit und Güterkonsum für alle Individuen gleich sein.

[1 Punkt]

Aus (6) und (7) folgt

$$\mu_y G' = \mu_a.$$

Zusammen mit (1) - (5) folgt weiter:

$$\frac{\partial U^i}{\partial y_i} G' = \frac{\partial U^i}{\partial F_i} \quad \text{für alle } i.$$

oder

$$\frac{\partial U^i / \partial F_i}{\partial U^i / \partial y_i} = G'$$ **[2 Punkte]**

In Worten: Im Pareto-Optimum muß die (für alle Individuen gleiche) Grenzratze der Substitution zwischen Güterverbrauch und Freizeit gleich der Grenzproduktivität der Arbeit sein. **[1 Punkt]**

b)

Der Ausdruck auf der linken Seite der Ungleichung gibt die Menge des Gutes an, die ein Individuum zusätzlich benötigt, wenn seine Freizeit um eine (kleine) Einheit gesenkt wird und sein Nutzenniveau konstant bleiben soll. Auf der rechten Seite steht der marginale Produktionszuwachs, der sich ergibt, wenn die Arbeitszeit ausgedehnt wird.

Verzichten die Individuen in der beschriebenen Situation auf ein wenig Freizeit, so könnte zusätzlich mehr produziert werden als erforderlich wäre, um das Nutzenniveau der Individuen konstant zu halten. Würde die überschüssige Gütermenge z.B. dem Individuum 1 zugeteilt, so würde sein Nutzen steigen, ohne daß der Nutzen aller übrigen Individuen sinkt. Dies wäre eine Pareto-Verbesserung. **[5 Punkte]**

c)

- Verbrauchsteuer

Wir betrachten exemplarisch eine Mengensteuer mit dem Satz t (im Fall einer Wertsteuer wäre die Argumentation ähnlich). Sei p der Verbraucherpreis und p_n der Erzeugerpreis des Gutes. Dann gilt:

$$p = p_n + t$$

Ein Individuum, das sich einem gegebenem Lohnsatz und einem gegebenem Verbraucherpreis gegenübersieht, löst das Problem

$$\max_{y_i, F_i} U^i(y_i, F_i)$$

$$\text{u.d.N.: } p_a(Z_i - F_i) = p y_i$$

Wir maximieren die Lagrange-Funktion

$$L = U^i\left(y_i, F_i\right) + \delta_i \left[p_a\left(Z_i - F_i\right) - p y_i\right]$$

bezüglich y_i und F_i. Die Bedingungen erster Ordnung sind

$$\partial U^i / \partial y_i = \delta_i p$$
$$\partial U^i / \partial y_i = \delta_i p_a$$

Da bei vollkommenem Wettbewerb alle Individuen mit dem gleichen Reallohn p_a / p konfrontiert sind, folgt:

$$\text{(8)} \qquad -\left.\frac{d y_i}{d F_i}\right|_{U^i} = \frac{\partial U^i / \partial F_i}{\partial U^i / \partial y_i} = \frac{p_a}{p} \quad \text{für alle } i.$$ **[3 Punkte]**

Gegeben sei eine feste Zahl von Firmen, die jeweils ihren Gewinn nach Steuer maximieren. Erzeugerpreis und Lohnsatz werden von ihnen als Datum angesehen. Bezeichnen wir mit A_k den Arbeitseinsatz der Firma k, dann ist ihr Gewinn

$$G_k = (p - t) G(A_k) - p_a A_k$$

Im Gewinnmaximum gilt

$$\text{(9)} \qquad G'\left(A_k\right) = \frac{p_a}{p - t}$$

Die Preise sind für alle Firmen gleich, so daß auch die Grenzproduktivität der Arbeit (und wegen der für alle Firmen identischen Produktionsfunktion auch der Arbeitseinsatz) in allen Firmen den gleichen Wert annimmt. **[3 Punkte]**

Aus (8) und (9) folgt:

$$\frac{p_a}{p} = \frac{\partial U^i / \partial F_i}{\partial U^i / \partial y_i} < G' = \frac{p_a}{p - t}$$ **[1 Punkt]**

Die Situation ist nicht Pareto-optimal. Die Verbrauchsteuer bewirkt, daß sich Verbraucher und Firmen unterschiedlichen Preisverhältnissen gegenübersehen. Der Reallohn ist für die Verbraucher niedriger als für die Firmen. Die Folge: Die Individuen fragen „zu viel“ vom Gut Freizeit nach (d.h. sie bieten „zu wenig“ Arbeitszeit an), und die Firmen setzen „zu wenig“ Arbeit ein und produzieren somit „zu wenig“. **[2 Punkte]**

- Subventionierung des Arbeitseinsatzes

Wir betrachten - wiederum exemplarisch - eine Mengensubvention mit dem Satz *s*. Eine typische Firma maximiert ihren Gewinn unter Berücksichtigung der Subvention:

$$\max_{A_k} pG\left(A_k\right) - (p_a - s)A_k$$

Im Gewinnmaximum gilt:

[3 Punkte]

$$(10) \qquad G' = \frac{p_a - s}{p}$$

Das Entscheidungsproblem der Verbraucher bleibt von der Subvention unberührt. Es gilt also weiterhin (8), und somit folgt: **[1 Punkt]**

[1 Punkt]

$$\frac{p_a - s}{p} = G' < \frac{\partial U^i / \partial F_i}{\partial U^i / \partial y_i} = \frac{p_a}{p}$$

Auch diese Situation ist nicht Pareto-optimal. Der Nettoreallohn, mit dem die Firmen kalkulieren, ist niedriger als der Reallohn, an dem sich die Individuen orientieren. Als Folge setzen die Firmen „zu viel“ Arbeit ein, und die Individuen fragen „zu wenig“ Freizeit nach. **[2 Punkte]**

2. Aufgabe

Gegeben sei das folgende Modell einer kleinen offenen Volkswirtschaft:

$$\begin{aligned} Y &= C\left[(1-t)Y\right] + I(i) + T(Y,w) + A \\ M &= L(Y,i) \\ K &= T(Y,w) \\ i &= i^{*} + \prod \end{aligned}$$

a) Grenzen Sie die Geldmengen *M1*, *M2* und *M3* voneinander ab. Erläutern Sie den Begriff der Zentralbankgeldmenge.

b) Erläutern Sie die Instrumente

   Offenmarktpolitik,

   Mindestreservepolitik und

   Refinanzierungspolitik, die die Zentralbank zur Steuerung der Geldmenge nutzen kann.

c) In der obigen Volkswirtschaft erhöht die Zentralbank die Geldmenge. Die Regierung halte Staatsausgaben und Steuersätze konstant. Berechnen Sie die Veränderungen der endogenen Variablen.

d) Interpretieren Sie die Veränderung des Sozialprodukts ausführlich ökonomisch. Gehen Sie dabei auch auf die Veränderung des Außenhandels ein.

Musterlösung

a) **[8 Punkte]**

• M1 =	Bargeld bei inländischen Nichtbanken + Sichtguthaben inländischer Nichtbanken bei Banken (ohne Zentralbankguthaben öffentlicher Haushalte)
• M2 = M1 +	Termingelder (mit einer Laufzeit bis 4 Jahre)
• M3 = M2 +	Spareinlagen (mit gesetzlicher Kündigungsfrist)
• Zentralbankgeldmenge =	Bargeld (bei Banken und Nichtbanken) + Einlagen von Geschäftsbanken bei der Zentralbank

b) **[6 Punkte]**

- Offenmarktpolitik: Die Zentralbank kauft oder verkauft am offenen Markt auf eigene Rechnung Wertpapiere
- Mindestreservepolitik: Die Zentralbank legt einen Mindesreservesatz fest. Die Geschäftsbanken müssen entsprechend dieses Satzes einen Teil ihrer Kundeneinlagen zinslos bei der Zentralbank hinterlegen.
- Refinanzierungspolitik: Hier sind drei Begriffe zu erläutern
  - Diskontrate: Die Geschäftsbanken können Wechsel vor Fälligkeit an die Zentralbank verkaufen. Sie müssen dafür einen Abschlag in Höhe des Diskontsatzes bezahlen.
  - Lombardsatz: Die Geschäftsbanken können sich bei der Zentralbank gegen Verpfändung von Wertpapieren verschulden. Für diesen Kredit zahlen sie den Lombardsatz.
  - Refinanzierungskontingente: Die Geschäftsbanken können diese Möglichkeiten nicht unbegrenzt in Anspruch nehmen sondern nur solange bis das Rediskont- bzw. das Lombardkontingent nicht ausgeschöpft ist.

c)
Es handelt sich um ein Fleming-Mundell Modell, daher gilt $di = 0$.
Aus der zweiten Gleichung folgt dann

$$dY = \frac{dM}{L_y} > 0$$ **[3 Punkte]**

Aus der ersten Gleichung kann dw berechnet werden:

$$dY = C_y(1-t)\ dY + T_y\ dY + T_w\ dw$$

$$\Rightarrow \qquad dw = \frac{1-C_y\ (1-t)-T_y}{T_w}\ \frac{dM}{L_y} > 0$$ **[3 Punkte]**

Für $dK = T_y\ dY + T_w\ dw = dT$ folgt aus Gleichung 1

$$dT = 1-C_y\ (1-t)\ dY = \frac{1-C_y\ (1-t)}{L_y} \cdot dM = dK > 0$$ **[3 Punkte]**

d) **[10 Punkte]**

Das Sozialprodukt wird auf dem Geldmarkt festgelegt. Da sich der Zins (und damit die Spekulationskasse) nicht ändert, muß das Sozialprodukt so lange steigen bis das zusätzliche Geld in der Transaktionskasse gelandet ist.
Die Zentralbank erhöht die Geldmenge. Sie kauft beispielsweise Wertpapiere. Dadurch kommt es zu Kurssteigerungstendenzen (der Wertpapierkurs $1/i$ kann nicht steigen, weil der Zinssatz durch das Ausland vorgegeben ist). Kurssteigerungstendenzen entsprechen Zinssenkungstendenzen. Sobald der Zins im Inland zu fallen droht, werden die Anleger verstärkt ausländische Wertpapiere kaufen $(dK > 0)$. Das führt in diesem Modell dazu, daß der Zins nicht wirklich sinkt. Der verstärkte Kapitalexport führt zu einer Übernachfrage nach Devisen mit der Folge, daß die heimische Währung abgewertet wird $(dw > 0)$. Die Abwertung führt zu einem Anstieg des Handelsbilanzsaldos $(dT = dK > 0)$. Daraufhin steigt das Sozialprodukt. Dieser Prozeß hält solange an bis das zusätzliche Geld vollständig als Transaktionskasse gehalten wird $(dM = L_y\, dY)$. Damit ist die Ursache für die Zinssenkungstendenz beseitigt. Die geldpolitische Maßnahme war erfolgreich.

Häufige Fehler:

Die Definitionen in a) und b) waren oft nicht korrekt.

In Teil c) waren neben di und dY auch dw und dK zu berechnen.

In Teil d) wurde Geld oft mit Einkommen gleichgesetzt. Beispiel: Die Haushalte haben mehr Geld, deshalb konsumieren sie auch mehr. Dieser Zusammenhang besteht so nicht. Zwar entsteht bei erhöhtem Einkommen der Wunsch nach höherer Kassenhaltung, aber eine höhere Kassenhaltung bedeutet nicht automatisch mehr Einkommen. Die hohe Kassenhaltung wird eher durch Wertpapierkäufe abgebaut. In diesem Modell kommt es erst dadurch zu Einkommens- und Konsumsteigerungen.

3. Aufgabe

Ein neoklassisches Wachstumsmodell werde durch die folgenden Gleichungen charakterisiert:

(1) $Y(t) = F(N(t),\ K(t))$

(2) $\hat{N}(t) = n > 0$

(3) $D(t) = \delta\, K(t) \qquad , \delta > 0$

(4) $I(t) = s\,Y(t) \qquad , \ 0 < s < 1$

Dabei bezeichnen

Y Sozialprodukt
F Produktionsfunktion
N Arbeit
K Kapital
n Wachstumsrate des Faktors Arbeit
D Abschreibungen
I Investitionen
t Zeit

a) Welche Annahmen werden üblicherweise über die Produktionsfunktion gemacht?

Geben Sie ein Beispiel an für eine Produktionsfunktion, die diese Annahmen erfüllt.

b) Leiten Sie die Bedingung ab, die die Kapitalintensität erfüllen muß, damit ein Wachstumsgleichgewicht vorliegt.

c) Veranschaulichen Sie diese Bedingung anhand der folgenden Abbildung:

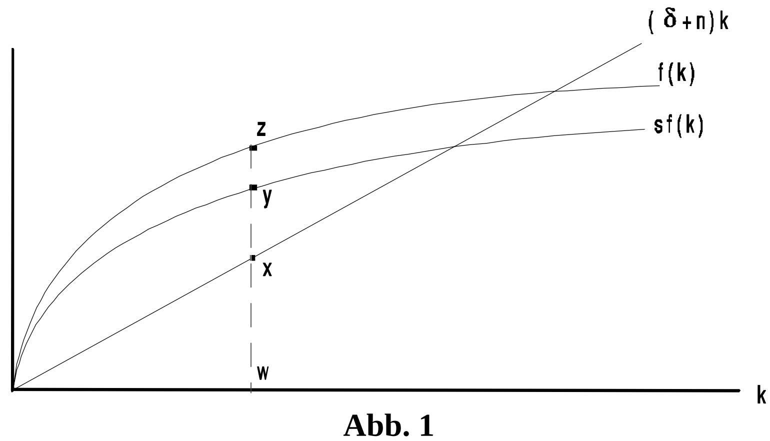


Abb. 1

Zeichnen Sie dazu die Kapitalintensität im Wachstumsgleichgewicht ein.

Was messen die Strecken $\overline{yz}$, $\overline{wy}$, $\overline{wx}$, $\overline{xy}$?

Was läßt sich anhand der Abbildung über die Stabilität des Wachstumsgleichgewichts sagen?

d) Im Wachstumsgleichgewicht bleibt der Pro-Kopf-Konsum c^* im Zeitablauf konstant. Wie beeinflußt die Höhe der Sparquote diesen Pro-Kopf-Konsum c^* im Wachstumsgleichgewicht? Stellen Sie den Zusammenhang im folgenden Diagramm graphisch dar:

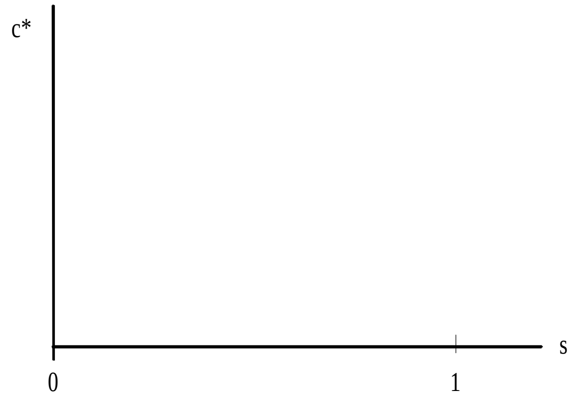


Abb. 2

Was versteht man in diesem Modell unter einer *optimalen* Sparquote?

Tragen Sie die optimale Sparquote in die Abb. 2 ein.

e) Leiten Sie (mathematisch) die Bedingung her, die bei einer optimalen Sparquote erfüllt sein muß, und zeichnen Sie in der folgenden Abbildung die Kurve *s f (k)* und die Kapitalintensität im Wachstumsgleichgewicht *k** ein, wie sie sich im Fall der optimalen Sparquote ergeben.

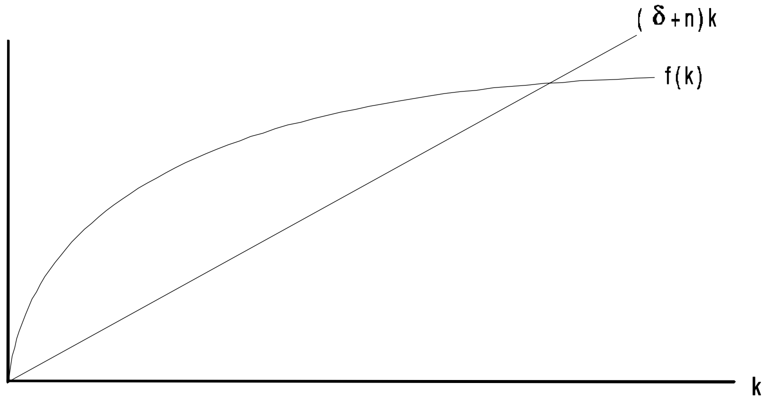


Abb. 3

Musterlösung

a)

Annahmen über die Produktionsfunktion F:

- Die Produktionsfaktoren sind gegeneinander substituierbar.
- Positive und abnehmende Grenzproduktivitäten:

$$F_N > 0 \ , \ F_K > 0 \ , \ F_{NN} < 0 \ , \ F_{KK} < 0$$

- Linearhomogenität:

$$F(\lambda N, \lambda K) = \lambda F(N, K) \qquad \textit{für alle } \lambda > 0.$$

- Häufig wird auch die Gültigkeit der Inada Bedingungen unterstellt:

$$\lim_{K\to\infty} F_K = \lim_{N\to\infty} F_N = 0 \quad , \lim_{K\to 0} F_K = \lim_{N\to 0} F_N = \infty$$

Ein Beispiel ist die

- Cobb-Douglas Produktionsfunktion

$$F(N, K) = aN^{\alpha} K^{1-\alpha} \qquad \textit{mit } a > 0 \quad , \quad 0 < \alpha < 1.$$

[6 Punkte]

Hinweise:

– *Ein häufiger Fehler war die Behauptung, die Grenzproduktivitäten seien „steigend und abnehmend“.*

– *„Konstante Skalenerträge“ meint dasselbe wie Linearhomogenität.*

– *Als Beispiel reichte der Begriff Cobb - Douglas - Produktionsfunktion allein nicht für die volle Punktzahl. Es wurde auch die Angabe einer entsprechenden Funktion erwartet. Häufiger Fehler war* $N^{\alpha} K^{\alpha-1}$. *Der Nachweis der obigen Eigenschaften für das genannte Beispiel war nicht notwendig und ist ggfs. mit einem Sonderpunkt honoriert worden.*

b)

Aufgrund der Linearhomogenität erhält man als Pro - Kopf-Produktionsfunktion (die Abhängigkeit der Größen von der Zeit t wird der besseren Übersichlichkeit halber weggelassen)

$$\frac{Y}{N} = \frac{F(N,K)}{N} = F\left(\frac{N}{N}, \frac{K}{N}\right) = F(1,k) =: f(k),$$

wobei $k := K/N$ die Kapitalintensität bezeichnet.

Die Änderung des Kapitalstocks erhält man aus (3) und (4):

$$\dot{K} = I - D = sY - \delta K \ .$$

Die Änderung der Kapitalintensität berechnet man nun als

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}N - \dot{N}K}{N^2} = \frac{\dot{K}}{N} - \hat{N}k = \frac{sY - \delta K}{N} - \hat{N}k = sf(k) - \delta k - nk \ .$$

[8 Punkte]

Im Wachstumsgleichgewicht gilt $\dot{k} = 0$, also $sf(k^*) = (\delta + n)k^*$. (5)

Hinweise:

– *Zur Lösung gehört auch die Herleitung der Pro - Kopf - Produktionsfunktion oder zumindest ein Hinweis darauf, was mit „f(k)“ gemeint ist und warum eine Darstellung in dieser Form möglich ist (Linearhomogenität).*

– *Relativ häufig wurden die Abschreibungen nicht berücksicktigt.*

c)

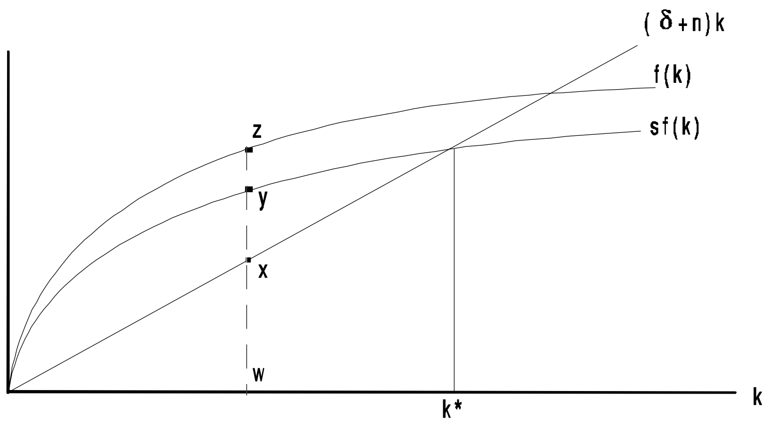


Abb. 1

In der Abbildung 1 messen die Strecken

$\overline{YZ}$ den Konsum pro Kopf;

$\overline{WY}$ den Spar- bzw. Investitionsbetrag pro Kopf;

$\overline{WX}$ die zur Erhaltung der Kapitalintensität w erforderlichen Investitionen pro Kopf („capital widening“). Dazu zählen zum einen Ersatzinvestitionen infolge der Abschreibungen δk und zweitens die Kapitalausstattung für die Arbeitskräfte, die infolge des Wachstums des Faktors Arbeit neu hinzukommen (nk);

$\overline{XY}$ $= \dot{k}$ die Differenz der letzten beiden Größen. (auch als „capital deepening“ bezeichnet).

Das Wachstumsgleichgewicht k* ist stabil, denn im Zeitablauf gleicht sich die Kapitalintensität immer mehr dem Gleichgewichtswert k* an:

- Für $0 < k < k^*$ wird pro Kopf mehr investiert, als zum Ausgleich von Abschreibungen und Arbeitswachstum benötigt wird. Diese zusätzlichen Investitionen erhöhen die Kapitalausstattung pro Kopf.

- Für $k>k^*$ ist es gerade umgekehrt. Die Bruttoinvestitionen reichen nicht aus, um ein Absinken der Kapitalintensität infolge Abschreibungen und Arbeitswachstum zu verhindern. Der Faktor Arbeit wächst also schneller als die Nettoinvestitionen. Die Kapitalausstattung pro Kopf sinkt.

- Bei $k=k^*$ reichen die Investitionen gerade aus, um Ersatzinvestitionen zu tätigen und die neu hinzugekommenen Arbeitskräfte mir dem bisherigen Kapital-pro-Kopf-Standard auszurüsten. Die Kapitalintensität bleibt unverändert. Das System befindet sich in einer Ruhelage. **[7 Punkte]**

d) Der Pro-Kopf-Konsum

$$c = f(k) - sf(k)$$

hängt nur von der Kapitalintensität ab. Da diese im Wachstumsgleichgewicht konstant ist, ist auch der Konsum pro Kopf im Wachstumsgleichgewicht konstant. Nach Einsetzen der Bedingung (5) erhält man für diesen Pro-Kopf-Konsum im Wachstumsgleichgewicht

$$c^* = f(k^*) - (\delta + n)k^* \ . \qquad (6)$$

Bei Variation von *s* verschiebt sich in Abbildung 1 die *sf(k)*- Kurve und daher auch k^*. Je höher *s*, desto höher k^*. Erhöht man nun ausgehend von $s=0$ die Sparquote immer weiter, so steigt auch k^* und man liest aus Abbildung 1 ab, daß c* als Differenz der Kurven *f(k)* und $(d+n)k$ zunächst steigt und dann fällt - und zwar bis auf Null für $s=1$.

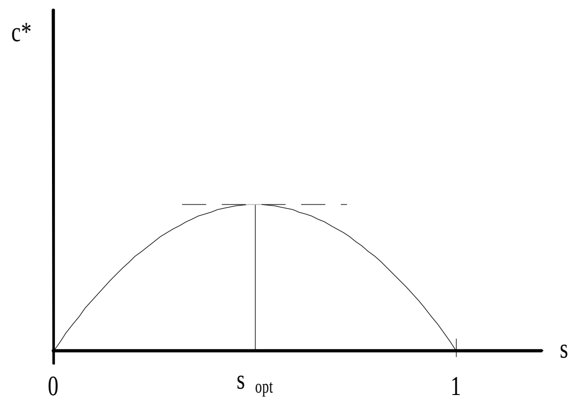


Abb. 2

Dieser Kurvenverlauf läßt sich wie folgt erklären. Eine Erhöhung der Sparquote hat zwei Effekte, die einander entgegengesetzt sind:

- Bei gegebener Produktion sinkt der Konsum, da das, was gespart wird, nicht konsumiert werden kann.

- Anderseits erhöht eine höhere Sparquote die Produktion pro Kopf, so daß insgesamt mehr für Sparen und Konsum zur Verfügung steht.

Je nachdem, welcher der beiden Effekte überwiegt, steigt oder fällt c^*.

Mit der <u>optimalen Sparquote</u> s_{opt} ist diejenige Sparquote gemeint, bei der der Pro-Kopf-Konsum im Wachstumsgleichgewicht (auch: der „langfristige Pro-Kopf-Konsum“) maximal ist. **[5 Punkte]**

Hinweis:

Dieser Aufgabenteil ging über die reine Reproduktion des Kursmaterials hinaus und hat dementsprechend die größten Probleme bereitet. Die Musterlösung ist daher ausführlicher als es in der Klausur erwartet wurde. Der produktivitätserhöhende Effekt wurde häufig übersehen und daher eine streng monoton fallende Beziehung zwischen Konsum und Sparquote postuliert.

e) Existenz und Eindeutigkeit des Wachstumsgleichgewichts vorausgesetzt, definiert die Bedingung (5)

$$sf(k^*) = (\delta + n)k^*$$

einen funktionalen Zusammenhang zwischen Sparquote und der Kapitalintensität im Wachstumsgleichgewicht $k^*(s)$.

Durch implizites Differenzieren von (5) erhält man

$$\frac{dk^*}{ds} = \frac{f(k^*)}{\delta + n - sf'(k^*)} = \frac{k^* f(k^*)}{s[f(k^*) - kf'(k^*)]} > 0 \ . \qquad (7)$$

Die Ungleichung gilt, da in der eckigen Klammer gerade die Grenzproduktivität der Arbeit steht. Je höher die Sparquote, desto höher k^*. Diesen Zusammenhang hatten wir im Aufgabenteil d) auch graphisch hergeleitet.

Einsetzen von $k^*(s)$ in (6) ergibt den Zusammenhang von c^* und s:

$$c^*(s) = f(k^*(s)) - (\delta + n)k^*(s)$$

Diese Funktion wurde in der Abbildung 2 graphisch dargestellt. Die optimale Sparquote löst das Maximierungsproblem $\max_s c^*(s)$ mit der Bedingung erster Ordnung

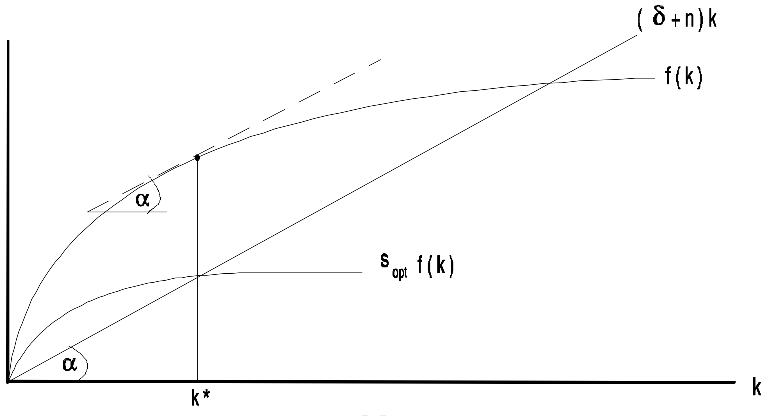
$$\frac{dc^*}{ds} = f'(k^*)\frac{dk^*}{ds} - (\delta + n)\frac{dk^*}{ds} = 0$$

Wegen (7) gilt $\frac{dk^*}{ds} \neq 0$. Man kann also durch $\frac{dk^*}{ds}$ dividieren und erhält die gesuchte Bedingung:

$$f'(k^*) = \delta + n \ .$$

Sie wird auch als „goldene Regel der Kapitalakkumulation“ bezeichnet.

Graphisch:



[7 Punkte]

Abb. 3

Hinweis: In der Lösung sollte der Zusammenhang von k^* und s deutlich werden. Insbesondere war $\frac{dk^*}{ds} \neq 0$ *zu begründen. Dies wurde häufig vergessen.*